MATHEMATISCHE MODELLEN
VOOR
ECONOMISCHE GROEI

Samenstelling: W. Eckhaus
A. van Harten
J.A. Sanders
F. Verhulst

INHOUD

1. Inleiding
2. Het basismodel
3. Invloed van belastingen en overheidsuitgaven
4. Ondernemersgedrag en werkloosheid
5. Looneisen bij volledige werkgelegenheid
6. Research en verhoging van productiviteit
7. Economische groei en het verbruik van grondstoffen

1. Inleiding

Bij het bestuderen van economische groeimodellen zullen we gebruik maken van een aantal begrippen uit de macro-economie. Wat hier volgt is een korte toelichting op deze begrippen; voor uitvoeriger beschouwingen verwijzen we naar de literatuur die aan het einde van de inleiding genoemd wordt.

Macro-economische modellen

In de macro-economie houden we ons bezig met de grote lijnen van het economisch proces in de wereld of een land als geheel. We houden ons hier niet bezig met detailproblemen als de prijzen van de veeteeltproducten in de E.E.G. of de werkgelegenheid in de metaalnijverheid in Noord-Brabant, maar met grootheden als het globale prijsniveau en de globale werkgelegenheid in de wereld.
In de eenvoudige modellen die we hier zullen bestuderen zal er steeds slechts sprake zijn van één productiesector; bovendien beschouwen we slechts de economie van een afgesloten gemeenschap, m.a.w. er is geen import en export (gesloten economieën met één productiesector heten in de literatuur veelal "national income models").
Het is hierbij interessant om op te merken, dat zelfs deze eenvoudige modellen van recente datum zijn. De eerste modellen ter beschrijving van de groei van kapitaal in een gesloten economie zijn ontwikkeld door R.F. Harrod en E.D. Domar in de jaren 1940-50.

Enkele economische variabelen

Y : nationaal inkomen (ook wel genoemd: nationaal product) d.i. de totale hoeveelheid geld die per jaar door overheid en be-

volking aan goederen, diensten, etc. wordt uitgegeven.

C : consumptie; de totale hoeveelheid geld die per jaar door de bevolking aan goederen en diensten wordt uitgegeven.

K : kapitaal d.i. het geheel van materieel dat noodzakelijk is voor de productie, in geld uitgedrukt (bijv. fabrieksgebouwen en terreinen, machinerie, winkels, maar ook voorraden gedeeltelijk en geheel gereedgekomen goederen).

I : investeringen: de hoeveelheid geld die per jaar besteed wordt aan uitbreiding en instandhouden van het kapitaal.

L : de totale beroepsbevolking.

G : overheidsuitgaven: totale hoeveelheid geld die per jaar door de overheid aan goederen en diensten wordt uitgegeven.

Economische vergelijkingen en wetten

Bij onze berekeningen zullen wij uitgaan van een aantal economische vergelijkingen, waartussen wij minstens twee types kunnen onderscheiden.

Ten eerste de evenwichtsvergelijking of identiteit. Deze kan worden afgeleid uit de definitie van de gebruikte grootheden. In het basismodel (§ 2) is een voorbeeld

$$Y = C + I.$$

Bij het opstellen van de benodigde differentiaalvergelijkingen wordt veelal uitgegaan van identiteiten.

Ten tweede de empirische gedragsvergelijking, die is ontstaan door observatie van het economisch gebeuren. Voorbeelden zijn de gebruikte productiefunctie van Cobb-Douglis (§ 2) en de vergelijking die ontstaat na constatering dat ondernemers ernaar streven hun winst te maximaliseren (§ 4).

De vergelijkingen van het eerste type zijn dus een rechtstreeks gevolg van de door ons gebruikte definities binnen het gekozen

model. Het tweede type vergelijkingen heeft het karakter van een economische wetmatigheid die empirisch is vastgesteld.

Literatuur

K.C. Kogiku, An Introduction to Macroeconomic Models; McGraw Hill Inc. 1968.

P.A. Samuelson, Economics, An Introductory Analysis; McGraw Hill Inc. 1964.

H. Theil, J.C.G. Boot en T. Kloek, Voorspellen en Beslissen; Markaboeken, Het Spectrum 1964.

J. Tinbergen en H.C. Bos, Mathematical Models of Economic Growth; McGraw Hill Inc. 1962.

Rapport van de Club van Rome; Uitg. Het Spectrum 1972.

2. Het basismodel

We beschouwen een economie bepaald door de grootheden:

Y nationaal inkomen

C consumptie

K hoeveelheid kapitaalgoederen

I investering in kapitaalgoederen

L omvang van de beroepsbevolking.

We hebben de relatie Y = C+I.

Dit kan men ook schrijven als

$$I = sY; \quad C = (1-s)Y \qquad \text{met } 0 < s < 1.$$

De groei van de kapitaalgoederen wordt beschreven door

$$\frac{dK}{dt} = I - \delta K$$

$\delta > 0$ is de factor die bepaalt hoe de hoeveelheid kapitaalgoederen afneemt door slijtage, zoekraken etc.

Wij nemen aan een wet van productie van nationaal inkomen door kapitaalgoederen en arbeid in de volgende vorm:

$$\frac{Y}{L} = f(\frac{K}{L}).$$

Voor de productiefunctie f wordt door Cobb-Douglis voorgesteld

$$f(\frac{K}{L}) = \beta(\frac{K}{L})^{\alpha}; \qquad 0 < \alpha < 1.$$

De conditie $0 < \alpha < 1$ is een weerspiegeling van de zogenaamde wet van "verminderde meeropbrengst";

Een eenvoudiger wet is de lineaire wet

$$f(\frac{K}{L}) = \beta_1(\frac{K}{L})+\beta_0.$$

Opgemerkt kan worden dat voor niet al te grote intervallen $0 < k_0 \leq \frac{K}{L} \leq k_1$ de lineaire wet als benadering van de Cobb-Douglis wet kan worden gebruikt.

Ten aanzien van de beroepsbevolking veronderstellen wij dat deze de toename volgt van de natuurlijke groei van de totale bevolking, d.w.z.

$$\frac{dL}{dt} = \mu L.$$

Wij veronderstellen hier dat de beroepsbevolking volledig in het productieproces wordt betrokken.

De parameters in de voorgaande beschrijving, d.w.z. s, δ, β (of β_1 en β_0) en μ kunnen uiteraard functies zijn van tijd t. Zo kan men stellen dat:

s karakteriseert de spaarzin en is aan verschillende invloeden onderhevig.

β karakteriseert de stand van de techniek.

μ het groeipercentage van de bevolking hangt af van vele factoren.

Samenvattend nu hebben wij het volgende stelsel

$$\frac{dK}{dt} = s(t)f(\tfrac{K}{L})\cdot L-\delta(t)K$$

$$\frac{dL}{dt} = \mu(t)L.$$

Voer thans in: $\frac{K}{L} = k$.

Er volgt: $\frac{dk}{dt} = s(t)f(k)-[\delta(t)+\mu(t)]k$.

Dit is de basisvergelijking van ons model.

We onderzoeken nu nader het geval van de Cobb-Douglis functie:

$$\frac{dk}{dt} = s(t)\cdot\beta(t)\cdot k^{\alpha}-[\delta(t)+\mu(t)]k; \quad 0 < \alpha < 1.$$

Dit is de vergelijking van Bernouilli.

Merk op dat het rechterlid niet Lipschitz-continu is op $0 \leqslant k \leqslant k_1$.

Het beginwaardeprobleem met $k(t_0) = 0$ is niet eenduidig oplosbaar: k kan gaan groeien of niet. Wij beschouwen echter $k(t_0) > 0$.

Definieer $\omega(t) = {}_{t_0}\!\int^{t} \{\delta(t')+\mu(t')\}dt'$

$$k(t) = e^{-\omega(t)}\cdot z(t).$$

Er volgt:

$$\frac{dz}{dt} = s(t)\cdot\beta(t)\ e^{(1-\alpha)\omega(t)} z^{\alpha}.$$

De oplossing is

$$z(t) = \{k(t_0)+(1-\alpha)\ {}_{t_0}\!\int^{t} s(t')\beta(t')e^{(1-\alpha)\omega(t')}dt'\}^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

De interpretatie van de resultaten is het eenvoudigst als alle parameters constant zijn.

Er volgt dan

$$k(t) = e^{-(\delta+\mu)(t-t_0)}\{k(t_0) + \frac{s\beta}{\delta+\mu}\ e^{(1-\alpha)(\delta+\mu)(t-t_0)}\}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Men ziet dat voor $t \to \infty$, $k(t)$ naar een evenwichtswaarde K_∞ toe gaat:

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = k_\infty = (\frac{s\beta}{\delta+\mu})^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

De welvaart, die gekarakteriseerd wordt door $\frac{Y}{L}$ nadert eveneens naar een evenwichtswaarde, gelijk βk_∞^{α}. Het is duidelijk dat wil er van groei van de welvaart sprake zijn, men moet eisen

$$(\frac{s\beta}{\delta+\mu})^{\frac{1}{1-\alpha}} > k(t_0).$$

Met andere woorden: men moet voldoende sparen (s), de techniek moet voldoende zijn ontwikkeld (β), en de bevolkingsaanwas moet niet te groot zijn (μ). Dit illustreert de moeilijkheden die ontwikkelingslanden ondervinden om zonder hulp van buiten tot groei te komen.

3. <u>Invloed van belastingen en overheidsuitgaven</u>

We zullen nu het basismodel gaan uitbreiden.

Stel G de overheidsuitgaven (voor financiering van collectieve voorzieningen etc.).

We hebben nu $Y = C+I+G$.

T zijn de belastingen.

Men definieert $Y_b = Y-T$.

Zij nu de consumptie:

$$C = (1-s)Y_b.$$

Door eliminatie volgt

$$I = Y-C-G = Y-(1-s)(Y-T)-G = sY+(1-s)T-G.$$

De groei van de kapitaalgoederen wordt nu bepaald door

$$\frac{dK}{dt} = s \cdot L \cdot f(\frac{K}{L})-\delta K+(1-s)T-G; \quad \frac{dL}{dt} = \mu L.$$

We voeren opnieuw in

$$k = \frac{K}{L}$$

en er volgt

$$\frac{dk}{dt} = sf(k)-(\delta+\mu)k+(1-s)\frac{T}{L}-\frac{G}{L} .$$

T en G zijn parameters die door de overheid worden ingesteld. In het algemeen kan men stellen dat

$$T = \tau Y, \quad \tau \text{ de belastingdruk}$$

$$G = \gamma L.$$

Voor evenwichtige overheidsbudgetering is noodzakelijk dat

$$G = T.$$

In werkelijkheid kan de overheid een eventueel tekort G-T financiëren door leningen op de kapitaalmarkt. Echter, in ons model

is het gehele vermogen der natie in kapitaalgoederen opgeslagen, en is een vlottende kapitaalmarkt niet aanwezig.

Samenvattend hebben wij nu de vergelijking:

$$\frac{dk}{dt} = s(1-\tau)f(k)-(\delta+\mu)k.$$

De invloed van belastingen en overheidsuitgaven manifesteert zich in het feit dat in de vergelijking van het basismodel s is vervangen door s(1-τ). Het is duidelijk dat een te grote belastingdruk een groeiende economie tot stagnatie kan brengen.

4. Ondernemersgedrag en werkloosheid

In het voorgaande is verondersteld dat de algehele natuurlijke aanwas van de beroepsbevolking in het arbeidsproces wordt ingeschakeld. In werkelijkheid worden arbeidsplaatsen gecreëerd door aanwas van kapitaalgoederen, en de mate waarin dit gebeurt hangt af van de arbeidsintensiteit van de productieprocessen. Het is in onze samenleving niet ongebruikelijk dat dure menselijke arbeid vervangen wordt door arbeid door machines, in een streven om ondernemerswist te maximaliseren.

Zij nu L^* het aantal arbeidsplaatsen .

$$\frac{dK}{dt} = sY-\delta K+(1-s)T-G.$$

De winst van de ondernemingen W_0 wordt gegeven door

$$W_0 = Y-wL^*,$$

waarbij w de loonindex. Om de winst te maximaliseren zou men streven naar

$$\frac{\partial W_0}{\partial L^*} = \frac{\partial Y}{\partial L^*} - w = 0.$$

Met de productiefunctie

$$Y = \beta\left(\frac{K}{L^*}\right)^{\alpha}\cdot L^*$$

volgt

$$L^* = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{w}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\cdot K.$$

Het verrassende is dat hiermee de productiefunctie lineair wordt, en wel

$$Y = \beta\left\{\frac{\beta(1-\alpha)}{w}\right\}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} K.$$

Zij nu

$$\beta\left\{\frac{\beta(1-\alpha)}{w}\right\}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = \beta^*.$$

Met dezelfde veronderstellingen t.a.v. T en G als in het voor-

gaande model, vinden wij

$$\frac{dK}{dt} = \{s(1-\tau)\beta^*-\delta\}K.$$

De oplossing is:

$$K(t) = K(t_0)\exp \int_{t_0}^{t} \{s(1-\tau)\beta^*-\delta\}dt'.$$

Als nu de natuurlijke aanwas van (potentiële) beroepsbevolking gegeven is door

$$\frac{dL}{dt} = \mu L$$

d.w.z. $L(t) = L(t_0)\exp \int_{t_0}^{t} \mu dt'$.

Dan ontstaat er werkloosheid indien

$$\int_{t_0}^{t} \{s(1-\tau)\beta^*-\delta\}dt' < \int_{t_0}^{t} \mu dt'.$$

De overheid zou in dit model de werkloosheid kunnen bestrijden door de belastingdruk τ te verlagen. Zij heeft echter hiertoe weinig speelruimte. De werklozen

$$L-L^*$$

moeten worden onderhouden.

Hiertoe is nodig, aan werkloosheidsuitkering

$$w_0(L-L^*).$$

De gelden moeten worden opgebracht door belastingen. Dit betekent dat de groei van overheidsuitgaven ten behoeve van het collectieve welzijn zou moeten afnemen.

Overigens zou werkloosheid kunnen worden bestreden door β^* te verhogen, d.w.z. door de loonindex w te verlagen.

Het is opmerkelijk dat in het model dat wij thans beschouwen, met de vraag naar arbeid bepaald door maximaliseren van ondernemerswinst, er feitelijk geen sprake is van economische groei (per

hoofd van de bevolking). Immers,

$$\frac{K}{L^*} = \left\{\frac{w}{\beta(1-\alpha)}\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{en} \quad \frac{Y}{L^*} = \frac{w}{1-\alpha}\ .$$

We beschouwen nu nader het bestrijden van werkloosheid door belastingverlaging. De werkloosheid $W(t)$ is gegeven door

$$W(t) = L(t) - L^*(t).$$

Stel $W(t_0) > 0$, terwijl bovendien voor $t = t_0$

$$s(1-\tau)\beta^* - \delta < \mu.$$

De belasting wordt nu verlaagd tot τ', zodanig dat

$$s(1-\tau')\beta^* - \delta > \mu.$$

Er volgt dat voor $t = t_1 > t_0$ de situatie wordt bereikt waarbij

$$W(t_1) = 0.$$

De vraag naar arbeid bepaald door het maximaliseren van ondernemerswinst is nu niet meer kleiner dan aanbod van arbeid, zodat de economie zich nu verder gaat ontwikkelen volgens het voorgaande model, d.w.z.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = s(1-\tau')\beta\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} - (\delta+\mu)\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$\left(\frac{K}{L}\right)_{t=t_1} = \frac{w}{\beta(1-\alpha)}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Zoals eerder besproken, vinden we voor $t > t_1$ economische groei indien

$$\left(\frac{s(1-\tau')\beta}{\delta+\mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} > \left(\frac{w}{\beta(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

De overheid kan nu weer overwegen de belastingdruk te verhogen. Zij moet echter voorzichtig zijn om de groei niet tot stagnatie te brengen.

5. Looneisen bij volledige werkgelegenheid

We nemen nu aan dat de volledige aanwas van de beroepsbevolking in het arbeidsproces wordt opgenomen. Ten aanzien van de investeringen hadden we eerder aangenomen dat een eenvoudige "spaarwet" gold:

$$I = s(Y-T) = s(1-\tau)Y.$$

Thans gaan wij het investeren op een andere wijze beschrijven. Zij w weer de loonindex, wL de totale loonsom en $(1-\tau_1)wL$ het beschikbaar inkomen uit lonen, waarbij τ_1 de druk is van de inkomstenbelastingen. We nemen aan dat $(1-\tau_1)wL$ volledig aan consumptie wordt besteed.

De bruto winst van de ondernemingen is $Y-wL$. De ondernemingen keren aan de aandeelhouders uit $\sigma(Y-wL)$. De aandeelhouders krijgen aldus een extra beschikbaar inkomen $(1-\tau_1)\sigma(Y-wL)$. Zij besteden hiervan aan extra consumptie $(1-s)(1-\tau_1)\sigma(Y-wL)$ zodat door de aandeelhouders, uit hun winsten, voor investering beschikbaar komt

$$s(1-\tau_1)\sigma(Y-wL)$$

(uiteraard kan s ook nul zijn).

De ondernemingen houden over voor investering

$$(1-\tau_2)(1-\sigma)(Y-wL)$$

waarbij τ_2 een (eventuele) belasting op ondernemingswinst is. Aldus is totaal beschikbaar voor investering

$$I = s^*(Y-wL)$$

met $s^* = (1-\tau_2)(1-\sigma)+s(1-\tau_1)\sigma$.

Wij hebben

$$\frac{dK}{dt} = s^*(Y-wL)-\delta K$$

en na herleiding, met

$$\frac{K}{L} = k; \quad \frac{dL}{dt} = \mu L; \quad \frac{Y}{L} = f(k)$$

$$\frac{dk}{dt} = s^*[f(k)-w]-(\delta+\mu)k.$$

Bij volle werkgelegenheid zijn de werknemers in staat loonsverhoging af te dwingen. We veronderstellen dat de loonindex w in een periode $t_0 \leqslant t < T+t_0$ constant blijft, vervolgens wordt in onderhandeling het loon bepaald op $(1+z_1)w_0$, om weer constant te blijven voor $t_0+T \leqslant t < t_0+2T_1$ etc.

De analyse van onze vergelijking kan echter niet meer elementair worden volbracht indien de productiefunctie f(k) niet lineair is. Met

$$f(k) = \beta k^{\alpha}$$

ontstaat een inhomogene Bernouilli vergelijking die niet meer elementair geïntegreerd kan worden.

We beschouwen nu het bijzondere geval

$$\alpha = \tfrac{1}{2}.$$

De differentiaalvergelijking is te schrijven als

$$\frac{dk}{dt} = (\delta+\mu)\{k^{\frac{1}{2}}-\phi_1\}\{k^{\frac{1}{2}}-\phi_2\}$$

waarbij $\phi_{1.2}$ de wortels zijn van

$$s^*\{\beta\phi-w\}-(\delta+\mu)\phi^2 = 0$$

d.w.z.

$$\phi_{1.2} = \frac{1}{2(\delta+\mu)}\{s^*\beta \mp \sqrt{(s^*\beta)^2-4s^*(\delta+\mu)w}\}$$

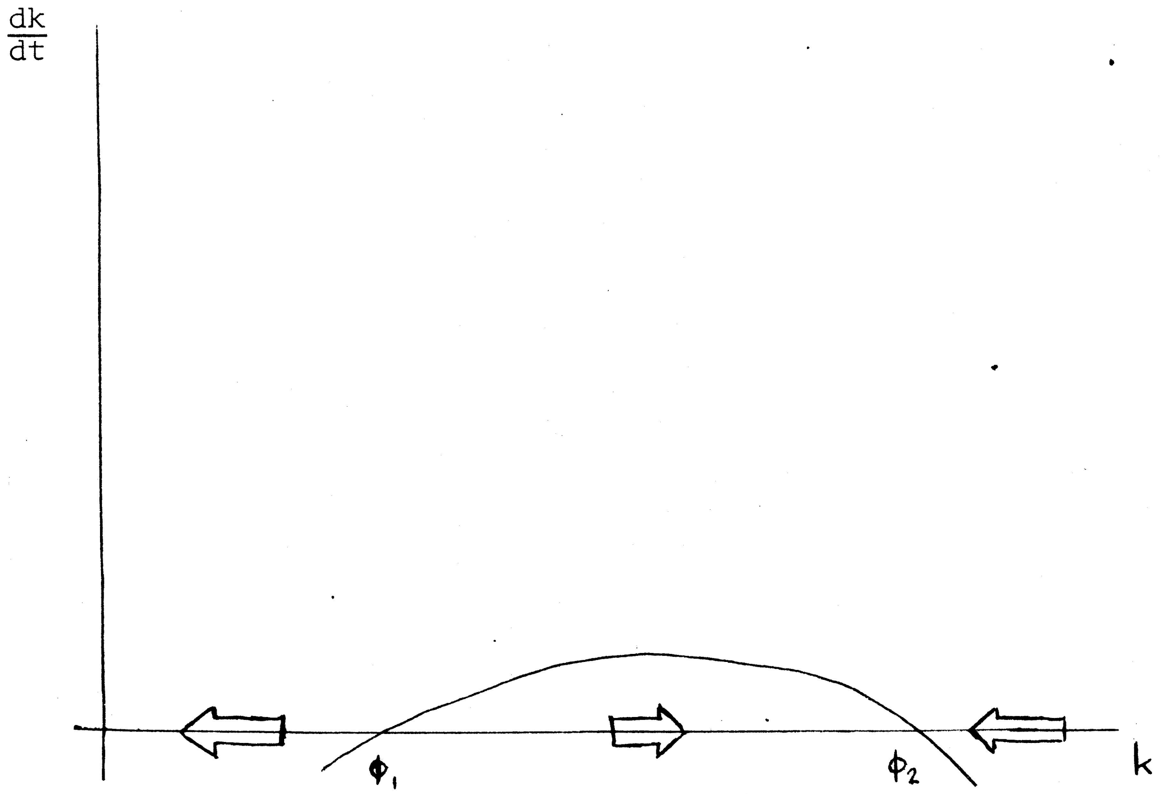
Zij nu $w(t_0) = w_0$; $w = w_0$ voor $t_0 \leqslant t < T$.

Als $w_0 > \frac{s^*\beta^2}{4(\delta+\mu)}$ dan is $\frac{dk}{dt} < 0$ voor alle k, de economie is in teruggang en er is weinig kans op loonsverhoging.

Veronderstel nu

$$w_0 < \frac{s^*\beta^2}{4(\delta+\mu)}$$

Beide ϕ_1 en ϕ_2 zijn positief en de ontwikkeling wordt in de volgende schets weergegeven:



De pijlen geven de richting aan waarin k zich ontwikkelt voor toenemende t.

We veronderstellen

$$\phi_1 < k(t_0) < \phi_2$$

dan is er in de periode $t_0 \leqslant t < t_0+T$ sprake van groeiende economie. Op tijdstip t_0+T wordt voor de volgende periode de loonindex verhoogd tot $(1+z_1)w_0$, $z_1 > 0$. Het is duidelijk dat ϕ_2 daarmee kleiner wordt, zodat, bij te grote z_1, groeiende economie kan omslaan in stagnerende of zelfs dalende. Als remedie in zo'n geval kan men proberen s^* te vergroten (wat ϕ_1 weer vergroot). Dit kan door σ (aan aandeelhouders uit te betalen winst) te verlagen, maar

hiervoor is een absolute ondergrens, namelijk nul. De overheid kan ook helpen door de belastingdruk τ_2 te verlagen, maar ook hiervoor is een absolute ondergrens nul.
De enige mogelijkheid die overblijft om de economie weer tot groei te brengen is vergroting van β, d.w.z. van de technologische kundigheid.

6. Research en verhoging van productiviteit

We gaan thans terug naar het eenvoudige basismodel en onderzoeken de invloed van investeren in het vermeerderen van kennis.

Zij nu

$$I = I_k + I_w.$$

$I_k = s_k Y$ investering in kapitaalgoederen,

$I_w = s_w Y$ investering in de wetenschappen.

$$s_k + s_w = s.$$

Uit $\frac{dk}{dt} = I_k - \delta k$ leiden we weer af

$$\frac{dk}{dt} = s_k \beta k^{\alpha} - (\delta+\mu)k; \quad 0 < \alpha < 1.$$

Zij nu $\frac{A}{L} = a$ de kennis per hoofd van de bevolking. De productiviteitsfactor β hangt af van a. We nemen aan, als "productiefunctie" $\beta = \phi(a) = a^{\gamma}; \quad 0 < \gamma < 1.$

Om a te vergroten, en zelfs op peil te houden, moet men investeren. We schrijven

$$\frac{dA}{dt} = \nu I_w - \rho A$$

ν is de effectiviteit van investering in kennisvermeerdering, $\rho > 0$ drukt uit dat investering ook nodig is om kennis op peil te houden.

Na herleiding volgt:

$$\frac{da}{dt} = s_w \nu \frac{Y}{L} - (\rho+\mu)a.$$

Met weer $\frac{Y}{L} = \beta k^{\alpha}$ en $\beta = a^{\gamma}$ verkrijgen we uiteindelijk het stelsel van <u>twee gekoppelde vergelijkingen</u>

$$\frac{dk}{dt} = s_k a^{\gamma} k^{\alpha} - (\delta+\mu)k$$

$$\frac{da}{dt} = s_w \nu a^{\gamma} k^{\alpha} - (\rho+\mu)a.$$

De vergelijkingen kan een iets prettiger aanzien worden gegeven door de transformatie

$$k = u^{\frac{1}{1-\alpha}} \; ; \quad a = v^{\frac{1}{1-\gamma}} .$$

Er volgt

$$\frac{du}{dt} = (1-\alpha)\{s_k v^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} - (\delta+\mu)u\} .$$

$$\frac{dv}{dt} = (1-\gamma)\{s_w \nu u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (\rho+\mu)v\}.$$

Het stelsel behoort tot een type dat tot nu toe wiskundig nog bijzonder weinig is onderzocht. Het gedrag van de oplossingen hangt sterk af van α en γ.

Een bijzonder geval doet zich voor indien

$$\alpha = \gamma = \tfrac{1}{2}.$$

Het stelsel wordt dan lineair, oplossingen zijn exponentiële functies, waarvan er één stijgende is (voor toenemende t), indien

$$\frac{s_k s_w \nu}{(\delta+\mu)(\rho+\mu)} > 1.$$

Als illustratie van de afhankelijkheid van het gedrag van de oplossingen van α en γ beschouwen we nu twee andere bijzondere gevallen.

Zij eerst: $\alpha = \gamma = \frac{1}{3}.$

Er volgt: $$\frac{du}{dt} = \frac{2}{3}\{s_k v^{\frac{1}{2}} - (\delta+\mu)u\}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3}\{s_w \nu u^{\frac{1}{2}} - (\rho+\mu)v\}.$$

Er bestaat nu een stationaire oplossing u_0, v_0, die voldoet aan

$$s_k v_0^{\frac{1}{2}} - (\delta+\mu)u_0 = s_w \nu u_0^{\frac{1}{2}} - (\rho+\mu)v_0 = 0.$$

Aangetoond kan worden dat voor alle beginwaarden geldt

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = u_0 ; \quad \lim_{t\to\infty} v(t) = v_0 .$$

Met andere woorden: de economie gaat naar een evenwichtssituatie, in tegenstelling tot de ongeremde exponentiële groei bij $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$. Geheel anders is het gedrag als wij kiezen

$$\alpha = \frac{2}{3}; \quad \gamma = \frac{1}{3}.$$

Er volgt dan

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{3}\{s_k v^2 - (\delta+\mu)u\}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3}\{s_w \nu u^{\frac{1}{2}} - (\rho+\mu)v\}.$$

We schrijven ter vereenvoudiging

$$\frac{s_k}{\delta+\mu} = \bar{s}_k; \quad \frac{s_w \nu}{\rho+\mu} = \bar{s}_w$$

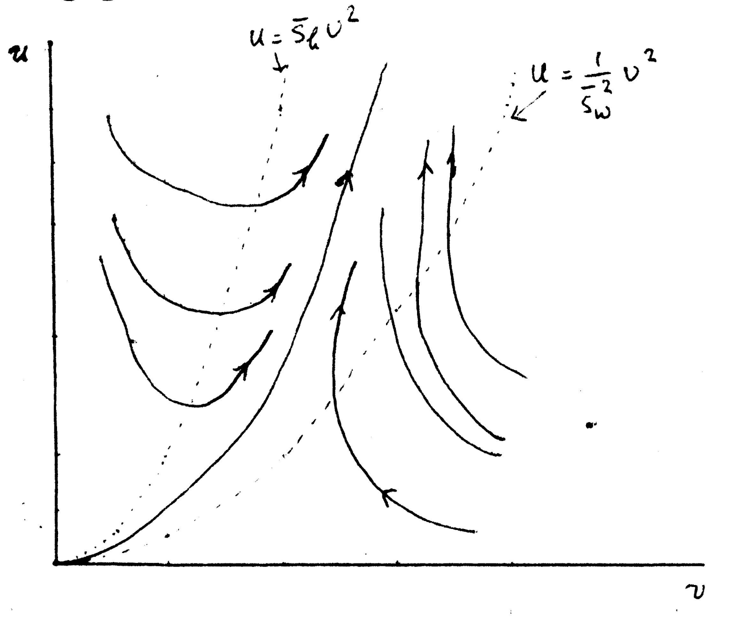
$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{3}(\delta+\mu)\{u - \bar{s}_k v^2\}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3}\, s_w \nu\{u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\bar{s}_w}\, v\}.$$

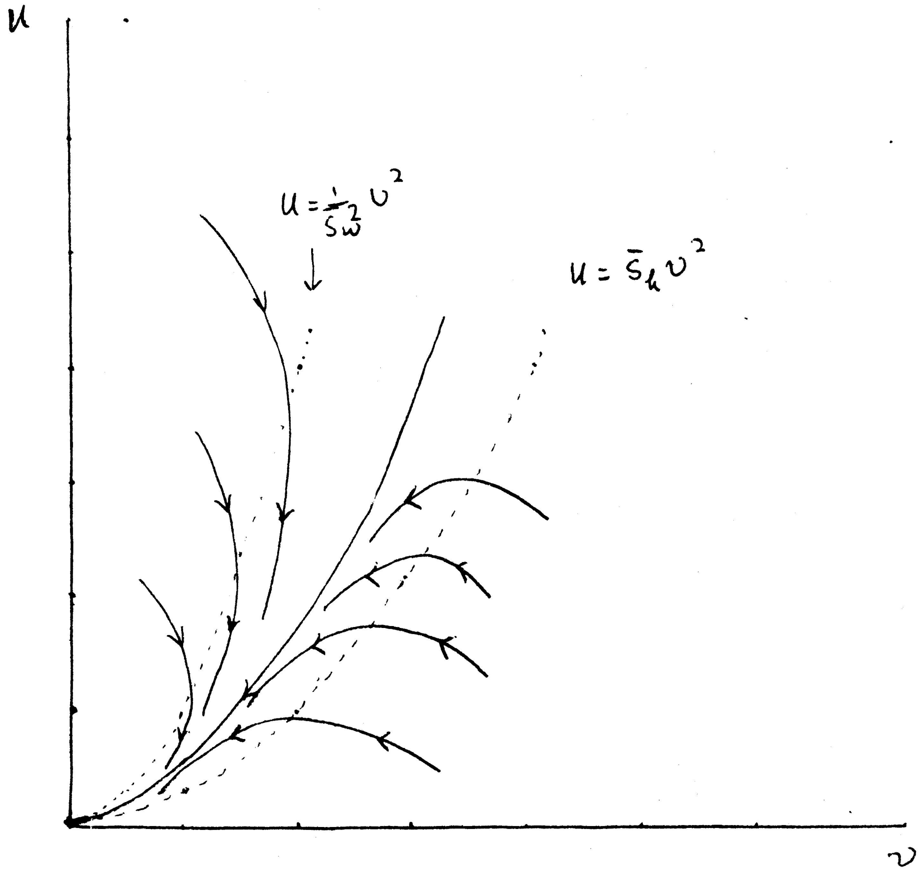
De vergelijking van de baankrommen is

$$\frac{du}{dv} = -\,\frac{1}{2}\,\frac{\delta+\mu}{s_w \nu}\,\frac{u - \bar{s}_k v^2}{u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\bar{s}_w} v}\,.$$

Zij eerst $\bar{s}_k > \frac{1}{\bar{s}_w^2}$. De baankrommen zijn in onderstaande schets weergegeven



Zij nu $\bar{s}_k < \frac{1}{\bar{s}_w^2}$. Het fasevlak ziet er dan als volgt uit



Er volgt uit onze beschouwingen dat voorspellingen op lange termijn, bij vergelijkingen van het type zoals hier onderzocht, kritiek afhangen van de informaties waarover men beschikt t.a.v. de productiefuncties, d.w.z. de parameters α en γ.

7. Economische groei en het gebruik van grondstoffen

Ter beschrijving van het verband tussen groei en het verbruik of eventueel opraken van grondstoffen keren we opnieuw terug tot het basismodel. We breiden dit echter uit met de variabelen

V : de voor productie gebruikte grondstoffen op tijdstip t

N : de voorraad grondstoffen die op tijdstip t bekend is

p_V: de prijs van de grondstoffen.

Het ligt voor de hand de volgende productiefunctie te kiezen

$$Y = \beta K^{\alpha} V^{\gamma} L^{1-\alpha-\gamma}$$

met β, α en γ constant; $0 < \alpha, \gamma < 1$.

Voor de investeringen geldt weer

$$I = sY.$$

Voor de groei van de beroepsbevloking

$$\frac{dL}{dt} = \mu L.$$

De gedragsrelatie die het verbruik van de grondstoffen bepaalt is maximalisering van de ondernemingswinst, dus van

$$Y - p_V V - (\text{overige kosten})$$

zodat $$p_V = \frac{\partial Y}{\partial V}.$$

Anderzijds zal de prijs van de grondstoffen omgekeerd evenredig zijn met het aanbod per hoofd van de bevolking. We kiezen als prijsrelatie

$$p_V = B\left(\frac{N}{L}\right)^{-\sigma}$$

B en σ positieve constanten.

De groei van de kapitaalgoeren en het verbruik van de grondstoffenvoorraad hangt samen met de wijze waarop geïnvesteerd wordt. We beschouwen eerst eens het katastrofale geval, waarbij de grondstoffenvoorraad opgebruikt wordt zonder dat er investeringen

worden gedaan om dit te voorkomen.

I. Het "après nous le déluge"-model

Kennelijk geldt nu

$$\frac{dK}{dt} = I-\delta K$$
$$= sY-\delta K$$

en voor de grondstoffenvoorraad

$$\frac{dN}{dt} = -V.$$

We gaan over op grootheden per hoofd van de bevolking

$$k = \frac{K}{L}$$
$$v = \frac{V}{L}$$
$$n = \frac{N}{L}\ .$$

Na substitutie van de productiefunctie vinden we voor de 2 groei-vergelijkingen en de prijsrelatie

$$\frac{dk}{dt} = s\beta k^{\alpha}v^{\gamma}-(\delta+\mu)k$$
$$\frac{dn}{dt} = -v-\mu n$$
$$\beta\gamma k^{\alpha}v^{\gamma-1} = Bn^{-\sigma}.$$

Elimineren van v levert dan

$$\frac{dk}{dt} = s\beta(\frac{\beta\gamma}{B})^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\ k^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}\ n^{\frac{\sigma\gamma}{1-\gamma}} - (\delta+\mu)k$$

$$\frac{dn}{dt} = -(\frac{\beta\gamma}{B})^{\frac{1}{1-\gamma}}\ k^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}\ n^{\frac{\sigma}{1-\gamma}} - \mu n.$$

Dit stelsel is verwant aan de vergelijkingen die ontstaan wanneer we het verband bestuderen tussen productiviteit en research (§ 6). Het minteken-verschil in de vgl. voor n maakt het gedrag van de oplossingen echter heel anders, er zijn nu geen evenwichtsoplossingen. De transformatie, gegeven in § 6 is hier weer nuttig, we

beschouwen echter ter illustratie hier alleen het simpele geval

$$\alpha = \sigma = 1-\gamma.$$

De vgl. worden

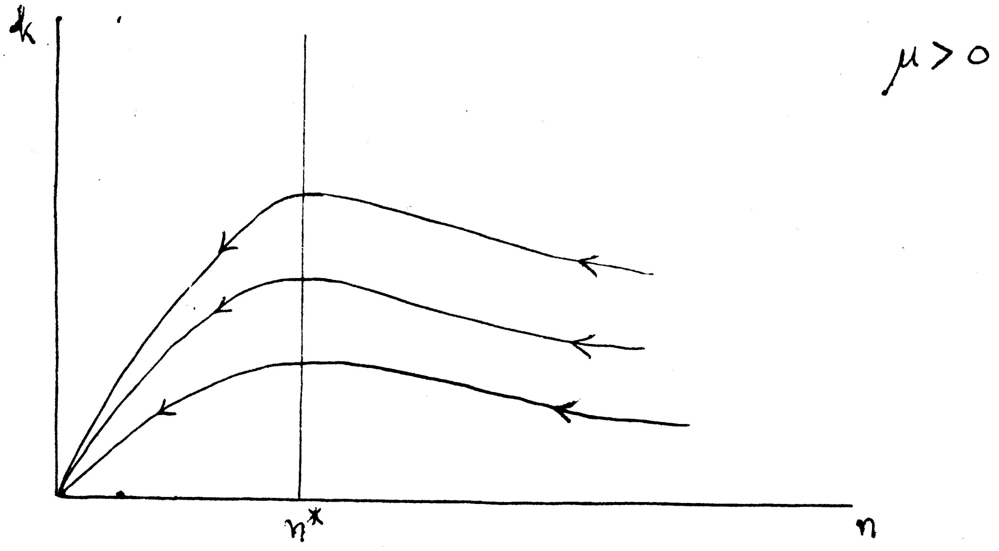
$$\frac{dk}{dt} = k(s'n^{\gamma}-(\delta+\mu))$$

$$\frac{dn}{dt} = -n(\beta'k+\mu).$$

Zoals te verwachten neemt n monotoon af; k stijgt monotoon tot de kritische waarde behorend bij

$$n^* = (\frac{\delta+\mu}{s'})^{\frac{1}{\gamma}}$$

is bereikt en neemt dan monotoon af. Fasevlak:



Opm. 1. De vgl. kunnen geïntegreerd worden en leiden o.a. tot bepaling v.h. kapitaalmaximum behorende bij n*.

2. Valt dit kapitaalmaximum samen met een productiemaximum?

3. Het is duidelijk dat grotere slijtage en grotere bevolkingsgroei de terugslag in de economie vervroegen.

4. De baankrommen gaan voor $t \to \infty$ naar (0,0) tenzij $\mu = 0$.

II. Een model voor investeringen in grondstoffen en economische groei

Het hiervóór beschreven katastrofale model is niet erg realistisch omdat het immers in de aard van de mensen ligt om naderend onheil af te wenden (al of niet met succes).

We zullen nu aannemen dat naast de kapitaalsinvesteringen I_k (= $s_k Y$) uitgaven I_g werden gedaan voor het zoeken naar en exploiteerbaar maken van nieuwe natuurlijke hulpbronnen. Deze investeringen geven we aan met I_g (= $s_g Y$).

Opgemerkt moet worden dat het nog realistischer zou zijn om

- een aparte productiesector voor de grondstoffen in te voeren;
- de invloed van de research mee te rekenen;
- de vervuiling erbij te betrekken met zijn invloed op bevolkingsgroei en kosten.

We beschouwen echter dit simpele model met investeringen in grondstoffen en zullen ontdekken dat een komplete analyse van dit model al verbazend moeilijk is.

We stellen dus

$$\frac{dK}{dt} = s_k Y - \delta K.$$

De grondstoffenvoorraad stijgt evenredig met de investeringen $s_g Y$ en een efficiëncyfactor ρ dus

$$\frac{dN}{dt} = \rho s_g Y - V.$$

Invoeren van de productiefunctie en grootheden per hoofd van de bevolking leidt tot

$$\frac{dk}{dt} = s_k \beta k^{\alpha} v^{\gamma} - (\delta + \mu) k$$

$$\frac{dn}{dt} = \rho s_g \beta k^{\alpha} v^{\gamma} - v - \mu n.$$

Maximaliseren van de ondernemingswinst leidt weer tot de prijs-relatie

$$\beta\gamma k^{\alpha} v^{\gamma-1} = Bn^{-\sigma}.$$

Elimineren van v geeft

$$\frac{dk}{dt} = s_k R_1 k^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} n^{\frac{\sigma\gamma}{1-\gamma}} - (\delta+\mu)k, \qquad R_1 = \beta\left(\frac{\beta\gamma}{B}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} .$$

$$\frac{dn}{dt} = \rho s_g R_1 k^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} n^{\frac{\sigma\gamma}{1-\gamma}} - R_2\, k^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} n^{\frac{\sigma}{1-\gamma}} - \mu n, \quad R_2 = \left(\frac{\beta\gamma}{B}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} .$$

Het lijkt zinvol om in dit model s_k en/of s_g als <u>stuurvariabelen</u> te beschouwen.

We transformeren

$$k = x^{\frac{1-\gamma}{1-\alpha-\gamma}}$$

$$n = y^{\frac{1-\gamma}{1-\gamma-\sigma\gamma}} \qquad \text{met kennelijk } \alpha+\gamma \neq 1, \quad \gamma+\sigma\gamma \neq 1.$$

Dit leidt tot

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= s_k A_1 y^{\frac{\sigma\gamma}{1-\gamma-\sigma\gamma}} - A_2(\delta+\mu)x \\ \frac{dy}{dt} &= A_3 x^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\gamma}} - s_g A_4 x^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\gamma}} y^{\frac{(1-\gamma)\sigma}{1-\gamma-\sigma\gamma}} - A_5 \mu y \end{aligned}}$$

met constanten $A_1 \ldots A_5$: $A_1 \cdot A_2 > 0$

$A_3 \cdot A_4 > 0$

$A_3 \cdot A_5 > 0$.

In de gevallen waar de transformatie niet toegestaan is worden de vgl..

$\boxed{\alpha+\gamma = 1}$

$$\frac{dk}{dt} = s_k R_1 k n^{\frac{\sigma\gamma}{1-\gamma}} - (\delta+\mu)k$$

$$\frac{dn}{dt} = \rho s_g R_1 k n^{\frac{\sigma\gamma}{1-\gamma}} - R_2 k n^{\frac{\sigma}{1-\gamma}} - \mu n.$$

$$\boxed{\gamma+\sigma\gamma = 1}$$

$$\frac{dk}{dt} = s_k R_1 k^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} n - (\delta+\mu)k$$

$$\frac{dn}{dt} = \rho s_g R_1 k^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} n - R_2 k^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} n^{\frac{1}{\gamma}} - \mu n.$$

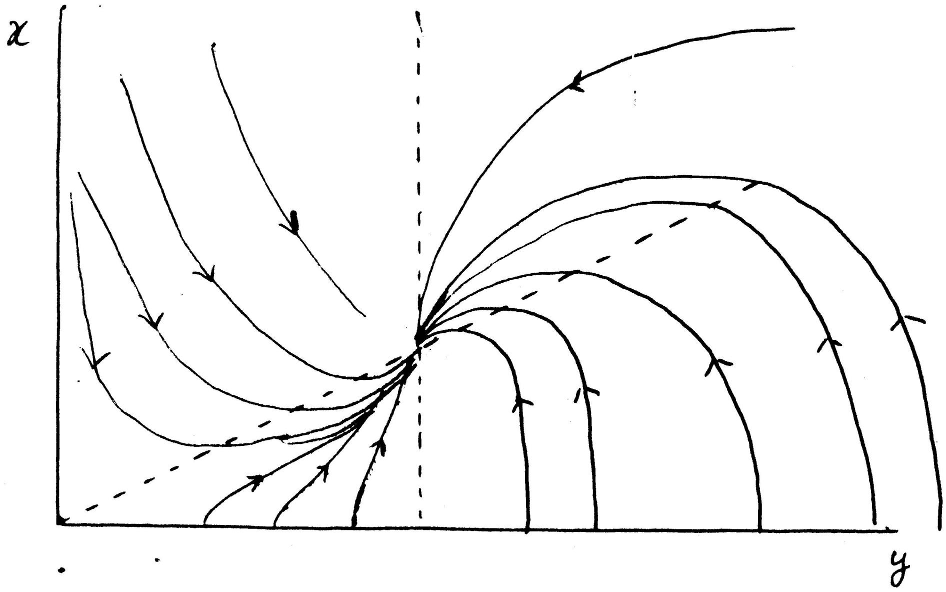
Ter illustratie beschouwen we een aantal bijzondere gevallen. Allereerst de aanname

Geen bevolkingsgroei $\mu = 0$.

Ga na dat als $\alpha+\gamma \neq 1$ er precies 1 positieve evenwichtsoplossing is. Voor $\alpha+\gamma > 1$ en $\alpha+\gamma < 1$ heeft deze echter een radikaal verschillend karakter. Voor $\alpha+\gamma = 1$ is er geen positieve evenwichtsoplossing.

Voorbeelden

1. $\boxed{\mu = 0 \quad \sigma = 1 \quad \alpha = \gamma = \frac{1}{3}}$

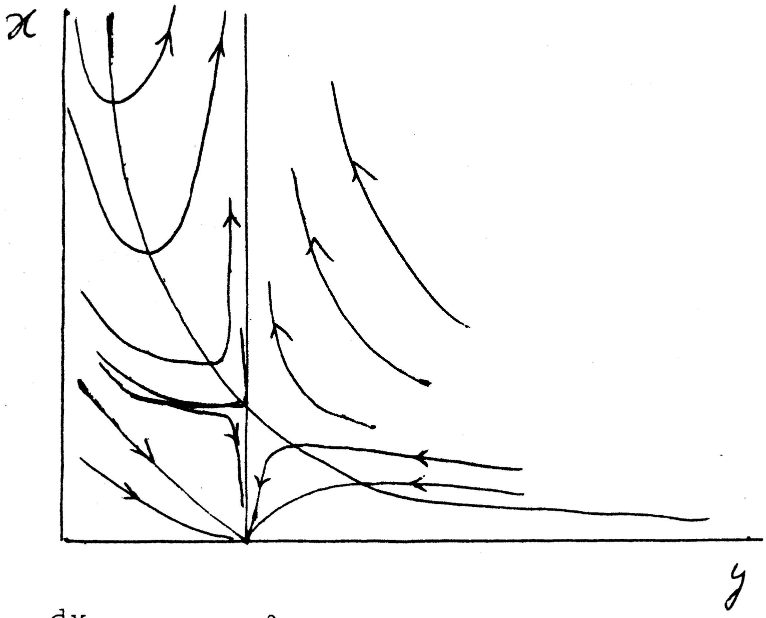


"groei" naar evenwicht

$$\frac{dx}{dt} = s_k A_1 y - A_2 \delta x \qquad \text{N.B.} \quad k = x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = A_3 x - s_g A_y x y^2 \qquad n = y^2$$

2. $\mu = 0 \quad \sigma = 1 \quad \alpha = \gamma = \frac{2}{3}$.



N.B. $k = x^{-1}$

$n = y^{-1}$

$$\frac{dx}{dt} = s_k A_1 y^{-2} - A_2 \delta x$$

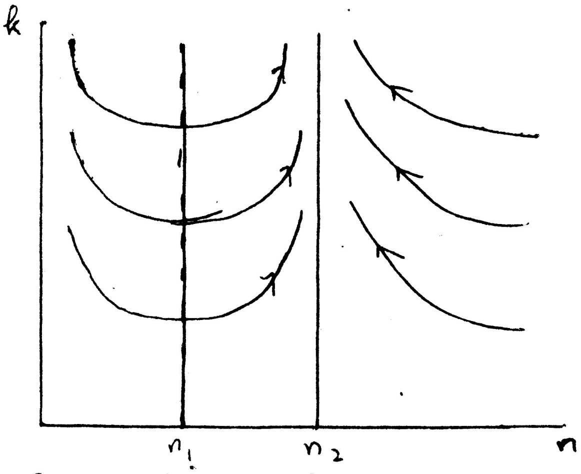
$$\frac{dy}{dt} = A_3 x^{-2} - s_g A_y x^{-2} y^{-1}.$$

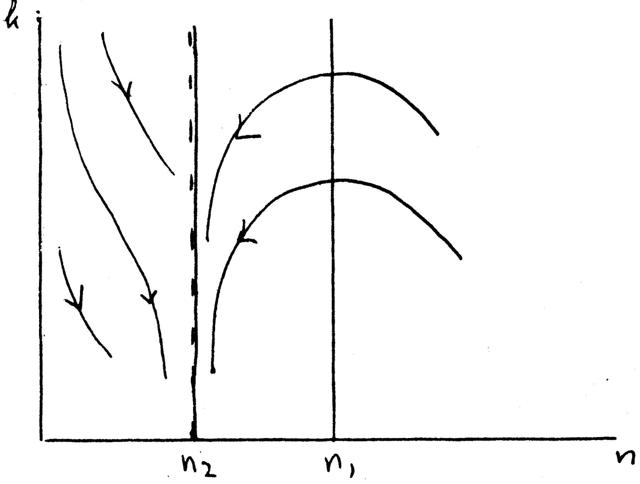
---

3. $\mu = 0 \quad \sigma = 1 \quad \alpha = \gamma = \frac{1}{2}$.

$\frac{dk}{dt} = s_k R_1 kn - \delta k$ nulpunt rechterlid $k = 0$, $n = n_1$

$\frac{dn}{dt} = \rho s_g R_1 kn - R_2 kn^2$ $k = 0$, $n = 0$, $n = n_2$





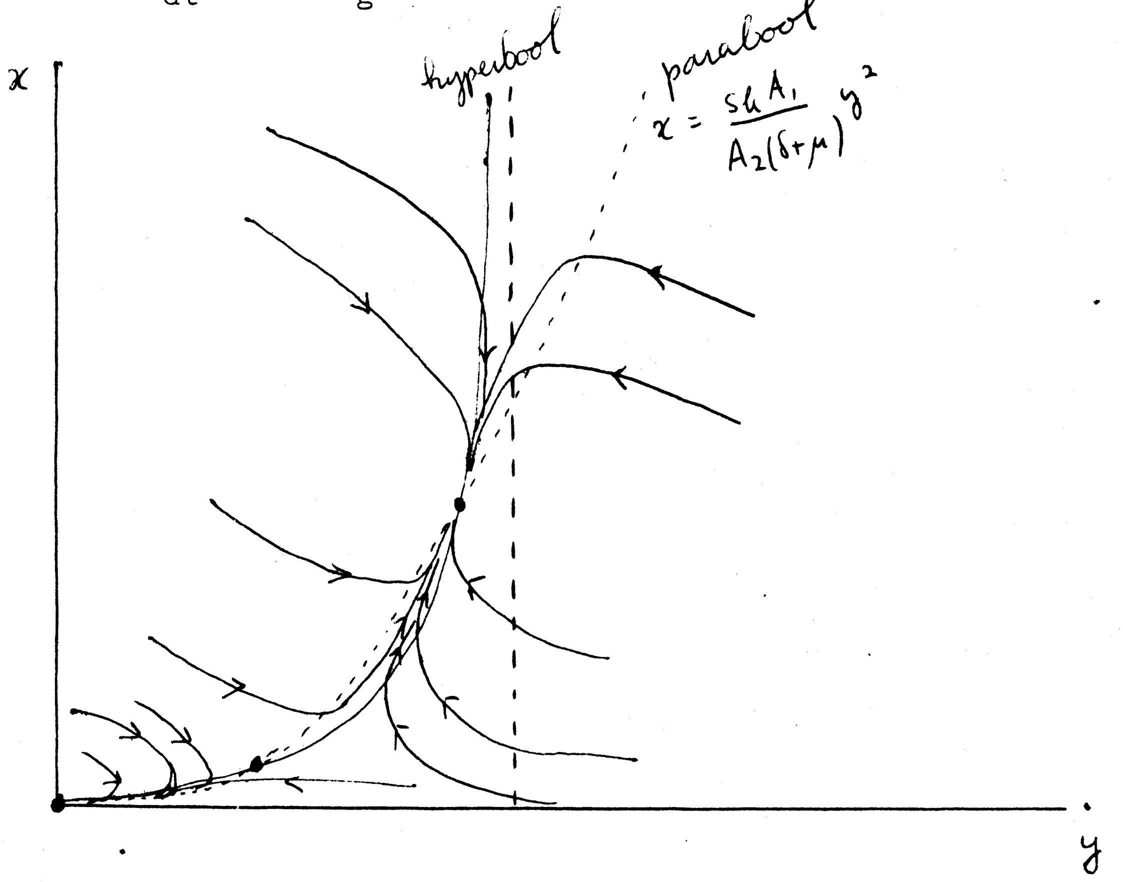
Opm. - het product $s_k \cdot s_g$ bepaalt kennelijk of we groei hebben of niet.
- in beide gevallen ontwikkelt de economie zich naar een bepaalde grondstoffenvoorraad n_2.

4. Bevolkingsgroei | $\mu > 0$ | $\alpha = \frac{1}{6},\ \gamma = \frac{2}{3},\ \sigma = \frac{1}{3}$ | bifurkatie

de vgl. worden

$$\frac{dx}{dt} = s_k A_1 y^2 - A_2(\delta+\mu)x \qquad \text{N.B. } k = x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = A_3 x - s_g A_4 xy - A_5 \mu y \qquad n = y^3 .$$



Indien $\mu = 0$ ontstaat eenzelfde type fasevlak als in voorbeeld 1; $\mu > 0$ veroorzaakt het ontstaan van 2 evenwichtsoplossingen i.p.v. 1; de oorsprong is bovendien een punt geworden waarheen baankrommen toegaan uit een gedeelte van het fasevlak.

COMPUTEROPGAVE TOEGEPASTE ANALYSE 74/75

- Bedoeling van de opgave is dat u een verslag inlevert van uw theoretische en praktische bevindingen.

- Komt u in wiskundige problemen terecht die u niet kunt oplossen, wendt u dan tot de heer Boele (kamer 505), spreekuur maandagmiddag 14.00-15.00 uur (vanaf 6 januari).

- Voor programmeertechnische vragen kunt u zich wenden tot de advieskamer van het ACCU.

- <u>Uiterste</u> inleverdatum van deze opgave: 1 februari 1975.

Opgave 1. We beschouwen het basismodel van pag. 5/6. We gebruiken als maatstaf voor de welvaart: $W = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{C}{L}(t)dt$. De volgende parameters zijn vast in deze opgave:

$\beta = 0.5$, $\delta = 0.06$, $\mu = 0.01$, $T = 75$, $k(0) = 1$.

We willen een vergelijking maken van de welvaart bij verschillende spaarstrategieën:

I	$s = 0.22$	$0 \leqslant t \leqslant 75.$
II	$s = 0.24$	$0 \leqslant t \leqslant \tau$
	$s = 0.20$	$\tau \leqslant t \leqslant 75$

waarbij τ bepaald wordt door de eis:

k(T) bij spaarstrategie I = k(T) bij spaarstrategie II.

III	$s = 0.24 - \frac{0.04}{75}t$	$0 \leqslant t \leqslant 75.$
IV	$s = \frac{90}{360+t}$	$0 \leqslant t \leqslant 75.$

Bekijk dit in eerste instantie voor $\alpha = \frac{3}{4}$ (waarbij sommige berekeningen expliciet uit te voeren zijn en dus een controlemogelijkheid bestaat). Vervolgens voor $\alpha = 0.70, 0.72, \ldots, 0.80$.

Kies voor een (eventuele) kwadratuurformule een g-repeteerde trapeziumregel. Ga na aan de hand van de output of het foutengedrag het door de theorie voorspelde gedrag heeft. Vergelijk uw resultaten met het resultaat dat u verkrijgt met AUTINT (procedure aanwezig bij het ACCU).

Bereken m.b.v. N.R. de tijd die nodig is om te stijgen in geval I van k(0) tot $k_0 + \frac{k(e)-k(0)}{2}$. Waar start u en hoe stopt het proces?

Controleer uw antwoord door deze tijd ook via een expliciete uitdrukking te berekenen.

Opgave 2. We beschouwen de differentiaalvergelijking van pag. 7 e.v.

$$\frac{dk}{dt} = s.f(k) - (\delta+\mu)k + (1-s)\frac{T}{L} - \frac{G}{L}.$$

Zij nu $T = \tau(t)Y$ met $\tau(t)$ de belastingdruk

en $G = \gamma L$.

Ga na dat er dan komt:

$$\frac{dk}{dt} = [s + (1-s)\tau(t)]f(k) - (\delta+\mu)k-\gamma.$$

We kiezen in deze opgave onze produktiefunctie $f(k) = \beta.k^{\alpha}$, en $\alpha = 1$. Verder geldt:

$s = 0.20$, $\delta = 0.06$, $\mu = 0.01$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.001$, $k(0) = 1$.

We willen nu nagaan welke belastingpolitiek, d.w.z. welke functie $\tau(t)$, over een periode van 10 jaar de hoogste gemiddelde welvaart geeft. Als maat voor de gemiddelde welvaart hanteren we:

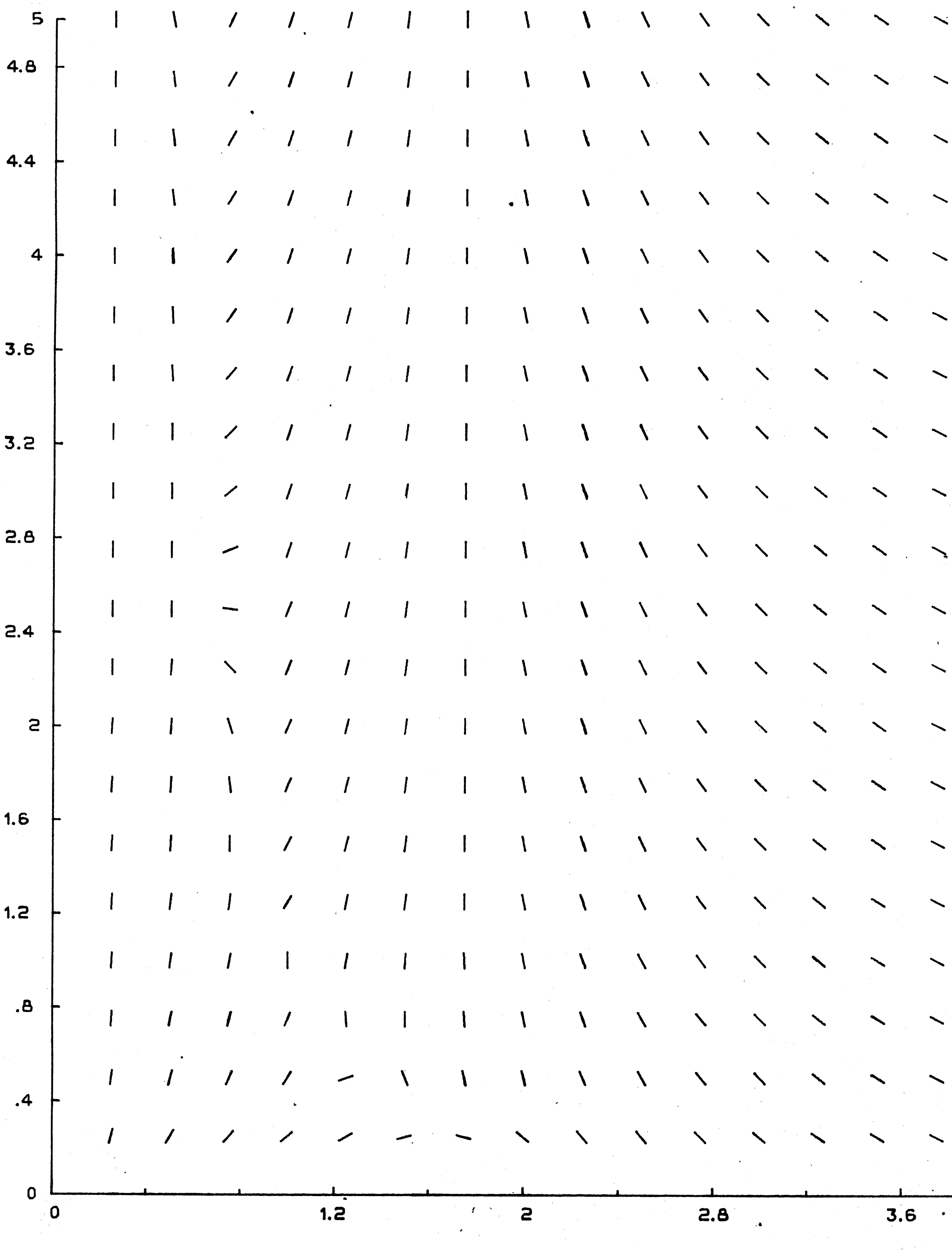
$$\frac{1}{T}\int_0^T (1-s)(1-\tau)\frac{Y}{L}(t)dt.$$

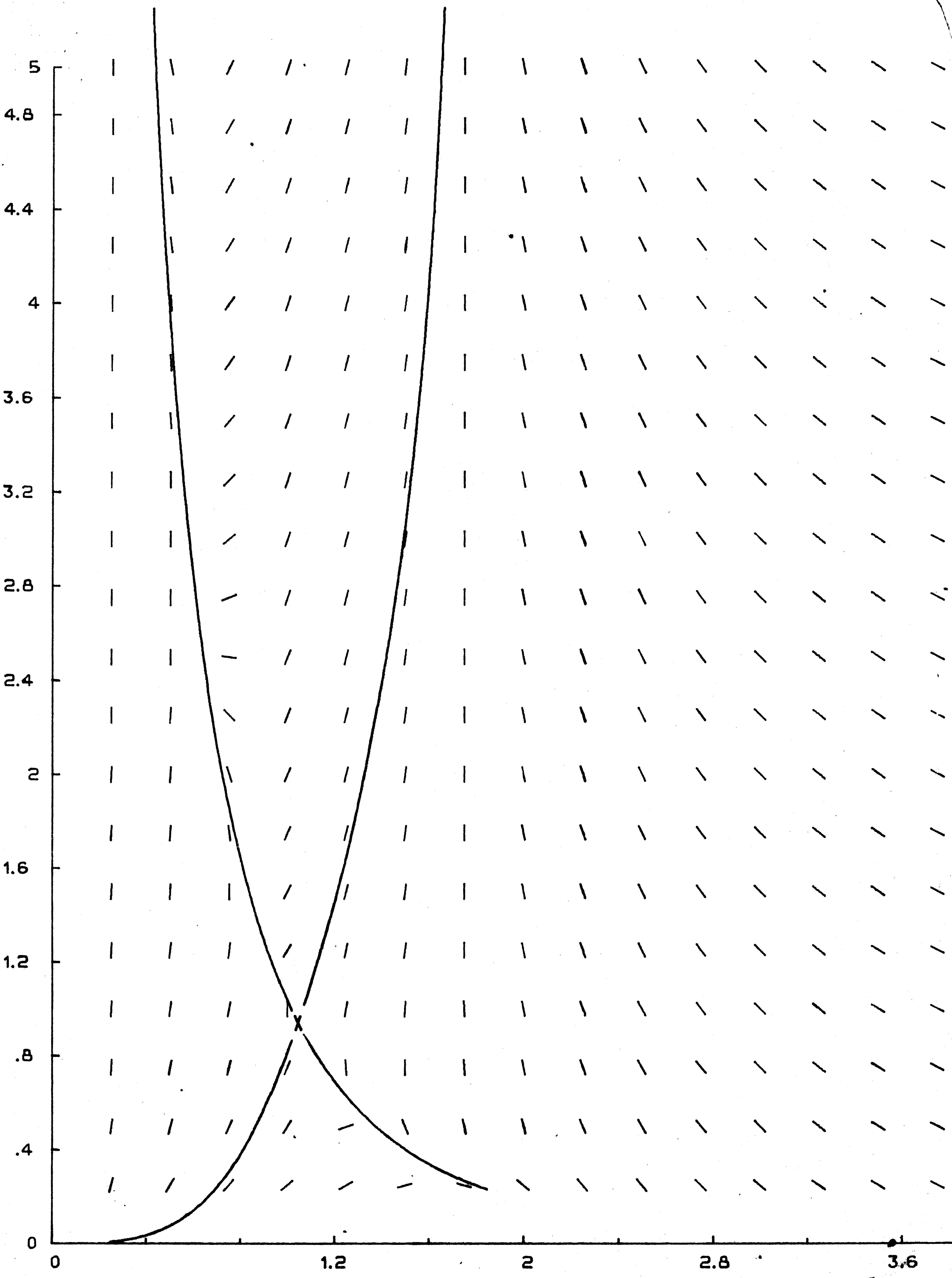
De mogelijke alternatieven zijn:

I	$\tau(t)$	=	0.25	$0 \leqslant t \leqslant 10$.
II	$\tau(t)$	=	0.30	$0 \leqslant t \leqslant 5$
		=	0.20	$5 \leqslant t \leqslant 10$.
III	τ	=	$0.30 - 0.005\,t$	$0 \leqslant t \leqslant 10$.
IV	τ	=	$\frac{0.6}{2+t}$	$0 \leqslant t \leqslant 10$.
V	τ	=	$\frac{60}{200+t^2}$	$0 \leqslant t \leqslant 10$.

Bereken de gemiddelde welvaart met vier cijfers achter de komme nauwkeurig voor deze 5 alternatieven. Gebruik voor eventuele numerieke kwadratuur, de gerepeteerde trapeziumregel. Ga aan de hand van de output na of het foutengedrag het door de theorie voorspelde gedrag heeft,

Geef aan hoe u de bovenstaande berekeningen zou moeten uitvoeren in het geval $\alpha = 0.7$.


5
4.8
4.4
4
3.6
3.2
2.8
2.4
2
1.6
1.2
.8
.4
0
0
1.2
2
2.8
3.6


5
4.8
4.4
4
3.6
3.2
2.8
2.4
2
1.6
1.2
.8
.4
0
0
1.2
2
2.8
3.6
X

(3) We beschouwen nu het catastrofale geval, waarbij de grondstoffenvoorraad wordt opgebruikt zonder dat voor aanvulling of vervanging wordt zorg gedragen (dictaat pag. 21-22). De prijsrelatie is een empirische wet waarvoor we kiezen $\sigma = 1$.

a. Laat zien dat het kapitaal per hoofd van de bevolking k naar een bepaald maximum groeit om vervolgens monotoon af te nemen. (Dit is op pag. 22 gedemonstreerd voor het geval $\alpha+\gamma = 1$, $\alpha = \sigma$.) Aanwijzing: gebruik het k,n-fasevlak.

We kiezen in het vervolg $\alpha+\gamma = 1$.

b. Voor welke waarde n* van de hoeveelheid grondstoffen per hoofd van de bevolking wordt dit kapitaalmaximum aangenomen? Correspondeert de waarde n* met een productie- en een consumptiemaximum? (Indien dit het geval is, geldt de uitspraak ook voor $\mu = 0$; ga de uitspraak voor dit geval na.)

c. Beschouw eens het geval van een stationaire bevolking(bevolkingsgroei nul). Stel de vergelijking op die de krommen in het k,n-fasevlak beschrijft en integreer deze (elke kromme gaat door een punt k_0, n_0). Hoe groot wordt het kapitaalmaximum? Bij welke waarde van n wordt de productie beëindigd? Kies $\delta = 0.06$, $s = 0.20$, $\beta = 0.50$, $B = 1$ (neem verschillende waarden van γ).

d. We willen graag weten op welke tijdschaal de door ons berekende waarden worden aangenomen. Kies bijv. als beginvoorwaarden n* en het bijbehorende kapitaalmaximum.
   - Op welk tijdstip is de kapitaalvoorraad gehalveerd en wanneer geldt $k = 0$. Voer de berekeningen uit voor verschillende waarden van γ en kies $s = 0.20$, $\beta = 0.50$, $B = 1$.
   - Indien we zuiniger zijn (δ kleiner) verwachten we enige uitstel van catastrofe. Hoe veranderen de eerder gevonden resultaten indien we de slijtage halveren: $\delta = 0.03$.

Practicum economische groeimodellen

1. We beschouwen het basismodel (pag. 4, 5) voor de kapitaalgroei per hoofd van de bevolking. Neem voorlopig de spaarfactor, slijtage en bevolkingsgroei constant. Het is duidelijk dat de ontwikkeling van het kapitaal en daarmee de welvaart per hoofd van de bevolking ($\frac{C}{L} = (1-s)\frac{Y}{L} = (1-s)f(k)$) afhangt van de productiefunctie.

   a. Het eenvoudigste geval is $f(k) = \beta k$ (β constant). Bereken $k(t)$ met beginvoorwaarde $k(0) = 1$; bereken de bijbehorende welvaart. Onder welke voorwaarde nemen deze grootheden toe met de tijd?

   b. We beschouwen nu eens het ingewikkelder geval van de productiefunctie $f(k) = \beta k^{0.75}$.

      1. Laat door middel van een schets in het $(\frac{dk}{dt},k)$-vlak zien dat er een (positieve) evenwichtsoplossing k_e bestaat.
      2. Onder welke voorwaarde is er groei van kapitaal en welvaart?
      3. Kies eens parameters die kunnen gelden voor een rijk land.

         Bijv. $\delta = 0.06$ $\quad s = 0.20$

         $\mu = 0.01$ $\quad \beta = 0.5$ $\quad k(0) = 1.$

         Ga na of er economische groei is, geef een expliciete uitdrukking voor $k(t)$.

         N.B.: In de formules op pag. 6 komen fouten voor.

         Hoeveel tijd is er nodig om te groeien van $k(0)$ tot $k_0 + \frac{k_e - k_0}{2}$? (Geef een formule en geef een schatting voor de gegeven parameters.)

   Er zijn verschillende maten om de welvaart in een economie te bepalen. Men kan bijv. nemen (grootheden per hoofd van de bevolking) $\frac{Y(t)}{L(t)}$ het nationaal product, $\frac{C(t)}{L(t)}$ de consumptie ten tijde t, of de gemiddelde consumptie over een tijdvak met lengte T:

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{C(t)}{L(t)} dt \ .$$

We gebruiken hier de laatste twee en willen komen tot een spaarstrategie die over een periode T een zo groot mogelijke welvaart levert. Iemand stelt bijv. de volgende politiek voor:

kies als $0 \leqslant t \leqslant \tau$: $s = s_1$ (constant)

als $\tau \leqslant t \leqslant T$: $s = s_2$ (constant).

Dit leidt tot een zekere k(T) en bijbehorende welvaart. We vergelijken deze resultaten met het geval waarin gedurende de gehele periode $[0,T]$ een constante spaarfunctie s is gekozen. Eis daartoe, dat k(T) in beide gevallen gelijk is.

Ga na, dat er een uitdrukking voor het tijdstip τ ontstaat afhankelijk van $s_1 - s$, $s - s_2$ en T.

Bereken τ voor $s = 0.20$, $s_1 = 0.25$, $s_2 = 0.18$, $T = 50$ jaar en vergelijk W in beide gevallen.

Stel, we willen in de fase $[\tau,T]$ meer consumeren (kies $s_2 = 0.10$). Hoe verandert dan τ en de gemiddelde consumptie W?

Iemand anders beweert: we kunnen best $s_1 < s_2$ kiezen (in het begin meer consumeren, later meer sparen) om tot dezelfde k(T) te komen. Kan dit inderdaad? Hoe groot worden in dit geval τ en W? (Neem $s_1 = 0.18$ en $s_2 = 0.25$.)

Vergelijk de resultaten met het geval $s_1 > s_2$.

c. Uit onderdeel b is duidelijk geworden dat de welvaart genoten over een periode T kan worden beschreven door de functionaal

$$W(s) = \int_0^T \frac{C}{L}(t)dt$$

$$= \int_0^T (1-s)f(k)dt.$$

Merk op dat ook k van s afhangt; s wordt gekozen uit de verzameling functies met een eindig aantal discontinuïteiten en $0 \leqslant s(t) \leqslant 1$; de overige parameters zijn constant. Indien we aan-

nemen dat s constant is, voor welke keuze van s wordt dan de welvaart W(s) optimaal?

Voor welke keuze van s wordt $\lim_{t\to\infty} (\frac{C}{L})$ optimaal?

Deze optimale s kan om politieke redenen niet geaccepteerd worden; in de praktijk geldt $0 \leq s(t) \leq 0.30$.

2. Overheidsuitgaven en belastingen

We beschouwen het model dat behandeld is op pag. 7 van het dictaat. We nemen aan dat de overheidsuitgaven op tijdstip t worden vastgesteld op $G = \gamma(t)L$.

De belastingen worden vastgesteld op $T = \tau(t)Y$.

Eventuele tekorten ($G-T \geq 0$) worden verholpen door papiergeld bij te drukken.

a. Stel de vergelijking op die de ontwikkeling van het kapitaal per hoofd van de bevolking beschrijft.

Op korte termijn zijn de grootheden s,δ,μ en de productiefunctie $f = \beta k^{\alpha}$ voor de overheid vaste gegevens waarop nauwelijks invloed kan worden uitgeoefend. Als instrumenten voor een beleid gebruikt de overheid de grootheden belastingdruk (τ) en overheidsuitgaven (γ).

b. Laat zien dat er, afhankelijk van de parameters die in de onder a afgeleide vergelijking voorkomen er geen, één of twee stationaire oplossingen bestaan (hierbij zijn de parameters "willekeurig vast" en $\alpha \in (0,1)$). Analyseer het gedrag van de oplossingen met t in elk van deze gevallen met behulp van een schets in het $(\frac{dk}{dt},k)$-vlak.

c. We veronderstellen nu dat de belastingdruk niet meer verhoogd

kan worden (om politieke redenen bijv.), zodat $\tau(t) = \tau_0$ (constant). De overheidsuitgaven nemen langzaam toe; stel $\gamma(t) = \gamma_0+\gamma_1(t)$ waarbij γ_0 de overheidsuitgavenfactor op $t = 0$ is (dus $\gamma_1(0) = 0$) en $\gamma_1(t)$ een monotoon toenemende maar begrensde functie.

Kies bijv. $\gamma_1(t) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\, t$ voor $t \in [0,1]$

$$\gamma_1(t) = \varepsilon \frac{t}{\varepsilon+t} \quad \text{voor } t > 1.$$

Kies allereerst $\alpha = 1$ in de vergelijking die onder a is afgeleid. Stel $(s(1-\tau_0)+\tau_0)\beta-\delta-\mu) = \omega$.

1. Geef de oplossing van de opgestelde vergelijking met gegeven beginvoorwaarde $k(0)$. In deze oplossing komen integralen over bekende functies voor.
2. Bereken een asymptotische ontwikkeling voor $\varepsilon \to 0$ voor de integraal die niet elementair te integreren is. Bereken de termen tot en met ε^3 indien $\omega = 0.02$, $\varepsilon = 0.01$. Kan de economische groei tot staan worden gebracht door de groei van de overheidsuitgaven? Bereken eerst of dit verschijnsel optreedt indien $\gamma_0 = 0.02$, $k(0) = 1$. Gebruik hiervoor de verkregen asymptotische ontwikkeling en vergelijk deze met resultaten verkregen door numerieke integratie.
3. Veranderen deze integralen indien we $\alpha \neq 1$ kiezen; bijv. $\alpha = 0.8$?